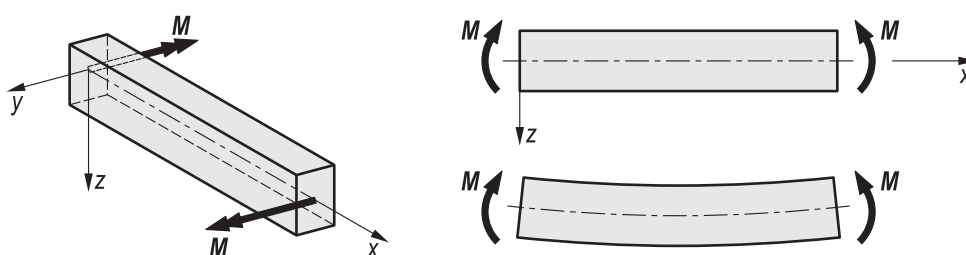


Zginanie belek o przekroju prostokątnym i dwuteowym – naprężenia normalne i styczne, projektowanie

8

Na rys. 8.1 przedstawiono belkę obciążoną momentami zginającymi w płaszczyźnie xy . Moment gnący dla tak obciążonej belki jest dodatni, zgodnie z konwencją przyjętą w rozdziale 6.



Rys. 8.1

Naprężenia normalne σ wywołane momentem gnącym będziemy określać na podstawie zależności:

$$\sigma = \frac{M}{W_y} \quad (8.1)$$

gdzie:

M — moment gnący,

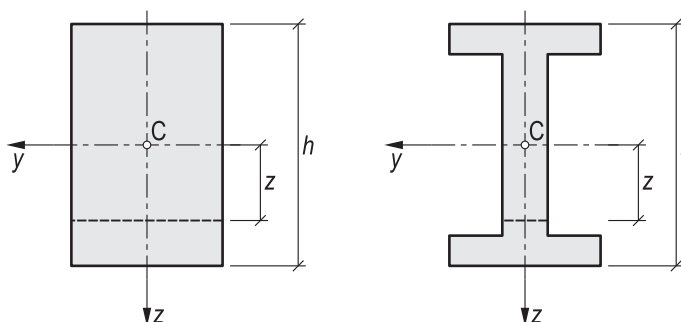
W_y — wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie, równy:

$$W_y = \frac{I_y}{z} \quad (8.2)$$

gdzie:

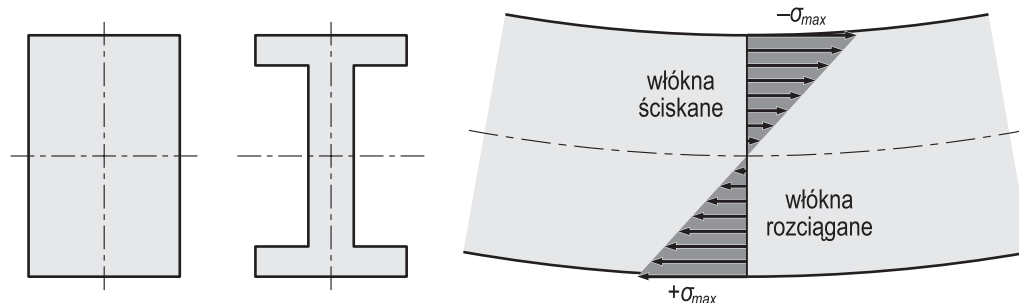
I_y — moment bezwładności przekroju poprzecznego belki względem centralnej osi bezwładności y (rys. 8.2),

z — odległość od osi y (rys. 8.2).



Rys. 8.2

Rozkład naprężeń normalnych jest liniowy na grubości przekroju belki, a maksymalne wartości występują w skrajnych włóknach. W przypadku przekrojów symetrycznych, np. prostokątny lub dwuteowy, wielkość z jest równa połowie wysokości przekroju, a naprężenia w górnej i dolnej części przekroju są sobie równe co do wartości, lecz mają przeciwne znaki (rys. 8.3).



Rys. 8.3

Projektując belkę z warunku nośności sprawdzamy, czy maksymalne naprężenia $\sigma_{\max}$ wywołane momentem gnącym nie przekraczają naprężeń dopuszczalnych na zginanie k_g . Warunek nośności możemy zapisać w postaci:

$$\sigma_{\max} \leq k_g \quad (8.3)$$

Naprężenia styczne wywołane siłą tnącą wyznaczamy w oparciu o wzór Żurawskiego:

$$\tau_{zx} = \frac{T S_y}{I_y b(z)} \quad (8.4)$$

gdzie:

T — siła tnąca,

S_y — moment statyczny względem centralnej osi bezwładności y , części przekroju poprzecznego, odciętej linią przechodzącą przez punkt dla którego wyznaczamy naprężenia styczne (rys. 8.4),

I_y — moment bezwładności przekroju poprzecznego belki względem centralnej osi bezwładności y ,

$b(z)$ — szerokość przekroju poprzecznego na poziomie punktu, dla którego wyznaczamy naprężenia styczne (rys. 8.4).

Na rys. 8.4 przedstawiono przekrój prostokątny o wymiarach $b \times h$. Prosta przechodząca przez punkt B odcina część przekroju poprzecznego o polu A_B równym:

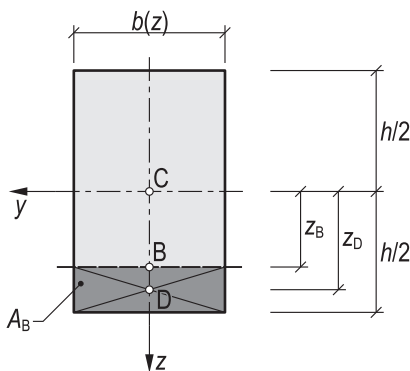
$$A_B = b \left(\frac{h}{2} - z_B \right)$$

i współrzędnej środka masy (punkt D):

$$z_D = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + z_B \right)$$

Moment statyczny odciętej części przekroju S_y^B jest zatem równy:

$$S_y^B = A_B z_D = b \left(\frac{h}{2} - z_B \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + z_B \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z_B^2 \right)$$



Rys. 8.4

Szerokość przekroju poprzecznego $b(z_B)$ na poziomie punktu B, dla którego wyznaczamy naprężenia styczne jest równa b i jest stała dla przekroju prostokątnego.

Z uwagi na fakt, iż wartość siły tnącej T w rozpatrywanym przekroju jest stała, podobnie jak centralny moment bezwładności I_y i szerokość przekroju poprzecznego b , wartość naprężeń stycznych będzie zależeć jedynie od odległości z od centralnej osi bezwładności y . Po podstawieniu wyznaczonych wielkości do zależności (8.4) otrzymamy ogólny wzór na naprężenia styczne dla przekroju prostokątnego:

$$\tau_{zx} = \frac{T \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (8.5)$$

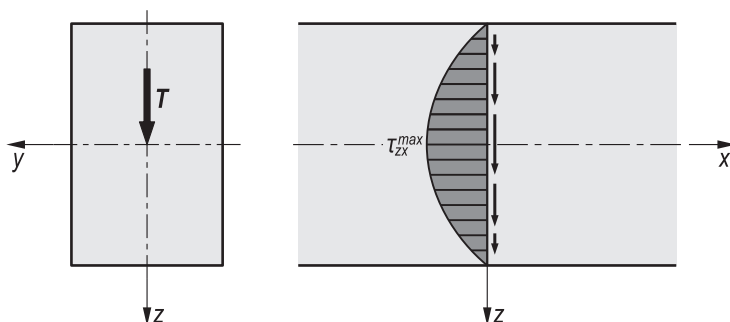
W skrajnych warstwach przekroju poprzecznego, dla $z = \pm h/2$ otrzymamy:

$$\tau_{zx} \left(z = \pm \frac{h}{2} \right) = \frac{6T}{bh^3} \left[\frac{h^2}{4} - \left(\pm \frac{h}{2} \right)^2 \right] = 0$$

Z kolei w warstwie leżącej na poziomie środka masy przekroju poprzecznego C, dla $z = 0$ uzyskamy:

$$\tau_{zx}(z=0) = \frac{6T}{bh^3} \left[\frac{h^2}{4} - 0^2 \right] = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} = \tau_{zx}^{\max}$$

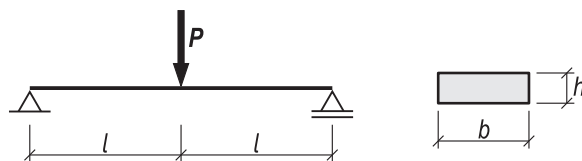
Wniosek końcowy jest zatem następujący – naprężenia styczne τ_{zx} osiągają maksymalne wartości w warstwie leżącej na poziomie środka masy przekroju oraz wartości zerowe – w skrajnych warstwach. Rozkład naprężeń na grubości przekroju jest opisany parabolą (8.5), co przedstawiono na rys. 8.5.



Rys. 8.5

Zadanie 8.1.

Belka o przekroju prostokątnym jest obciążona jak na rys. 8.6. Zaprojektować belkę z warunku nośności. Dane: $P = 4 \text{ kN}$, $l = 300 \text{ mm}$, $k_g = 180 \text{ MPa}$, $b = 3h$.

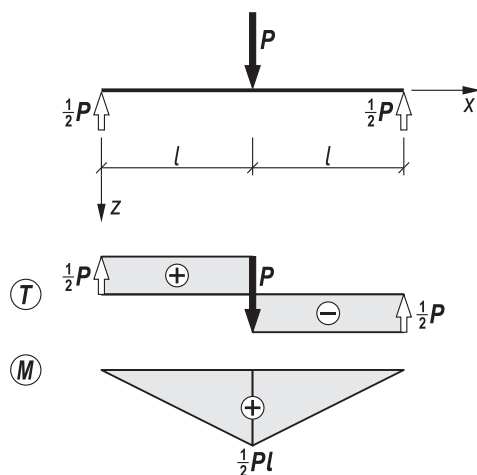


Rys. 8.6

Rozwiązanie

Sporządzamy wykresy momentów gnących i sił tnących (rys. 8.7). Maksymalny moment gnący występuje w połowie długości belki, a jego wartość wynosi:

$$M_{\max} = \frac{1}{2}Pl$$



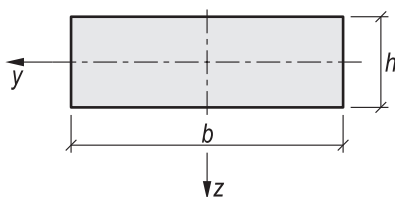
Rys. 8.7

Centralny moment bezwładności I_y przekroju poprzecznego prostokąta (rys. 8.8) jest równy:

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

a wskaźnik wytrzymałości na zginanie:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{I_y}{h/2} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$$



Rys. 8.8

Podstawiając $b = 3h$ otrzymamy:

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{3h \cdot h^2}{6} = \frac{1}{2}h^3$$

Warunek nośności ma zatem postać:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{\frac{1}{2}Pl}{\frac{1}{2}h^3} = \frac{Pl}{h^3} \leq k_g$$

Wykonując kolejne przekształcenia, wyznaczamy minimalną wysokość belki:

$$h^3 \geq \frac{Pl}{k_g} \quad h \geq \sqrt[3]{\frac{Pl}{k_g}}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{4000 \cdot 300}{180}} = 18,82 \text{ mm}$$

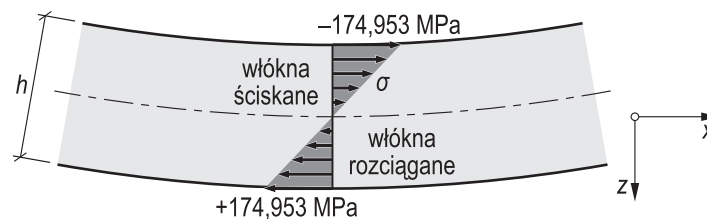
Przyjmujemy wymiary przekroju poprzecznego belki:

$$h = 19 \text{ mm} \quad b = 3h = 57 \text{ mm}$$

Maksymalne naprężenia normalne wywołane momentem gnącym są równe:

$$\sigma_{\max} = \frac{Pl}{h^3} = \frac{4000 \cdot 300}{(19)^3} = 174,953 \text{ MPa}$$

Wykres naprężeń normalnych przedstawiono na rys. 8.9.



Rys. 8.9

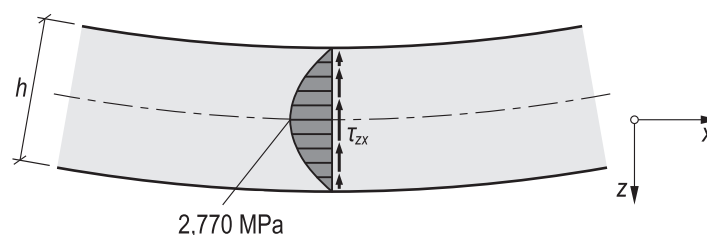
Wartość siły tnącej T w rozpatrywanym przekroju jest równa $P/2$. Naprężenia styczne wyznaczmy z wyprowadzonej ogólnej zależności na naprężenia styczne w przekroju prostokątnym (8.5):

$$\tau_{zx} = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

W skrajnych warstwach naprężenia styczne są równe zero, natomiast maksymalne wartości wystąpią w warstwie przechodzącej przez środek masy ($z = 0$):

$$\tau_{zx}^{\max} = \tau_{zx}(z = 0) = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} = \frac{3}{4} \frac{P}{bh} = \frac{3}{4} \frac{4000}{57 \cdot 19} = 2,770 \text{ MPa}$$

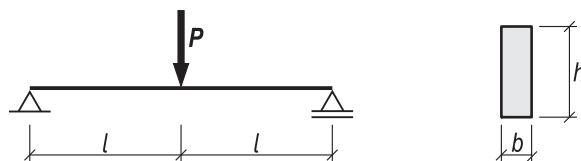
Wykres naprężeń stycznych przedstawiono na rys. 8.10.



Rys. 8.10

Zadanie 8.2.

Belka o przekroju prostokątnym jest obciążona jak na rys. 8.11. Zaprojektować belkę z warunku nośności. Dane: $P = 4 \text{ kN}$, $l = 300 \text{ mm}$, $k_g = 180 \text{ MPa}$, $h = 3b$.

**Rys. 8.11***Rozwiązanie*

Wykresy momentów gnących i sił tnących są analogiczne jak w zadaniu 8.1 (rys. 8.7). Maksymalny moment gnący występuje w połowie długości belki, a jego wartość wynosi:

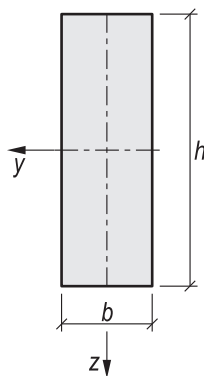
$$M_{\max} = \frac{1}{2} Pl$$

Centralny moment bezwładności I_y przekroju poprzecznego prostokąta (rys. 8.12) jest równy:

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

a wskaźnik wytrzymałości na zginanie:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{I_y}{h/2} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$$

**Rys. 8.12**

Podstawiając $h = 3b$ otrzymamy:

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \cdot (3b)^2}{6} = \frac{3}{2} b^3$$

Warunek nośności ma zatem postać:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{\frac{1}{2} Pl}{\frac{3}{2} b^3} = \frac{Pl}{3b^3} \leq k_g$$

Wykonując kolejne przekształcenia, wyznaczamy minimalną wysokość belki:

$$b^3 \geq \frac{Pl}{3k_g} \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{Pl}{3k_g}}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{4000 \cdot 300}{3 \cdot 180}} = 13,05 \text{ mm}$$

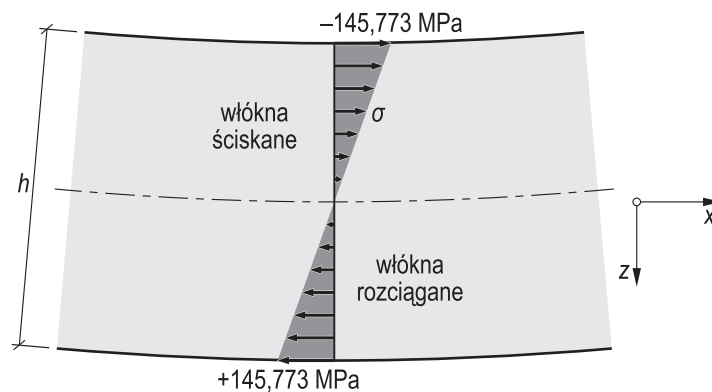
Przyjmujemy wymiary przekroju poprzecznego belki:

$$b = 14 \text{ mm} \quad h = 3b = 42 \text{ mm}$$

Maksymalne naprężenia normalne wywołane momentem gnącym są równe:

$$\sigma_{\max} = \frac{Pl}{3b^3} = \frac{4000 \cdot 300}{3 \cdot (14)^3} = 145,773 \text{ MPa}$$

Wykres naprężeń normalnych przedstawiono na rys. 8.13.



Rys. 8.13

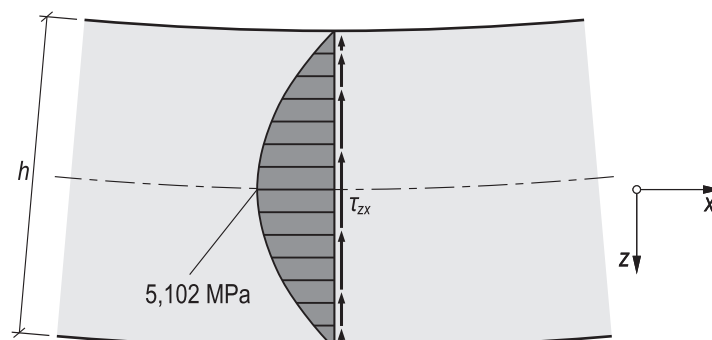
Naprężenia styczne wyznaczmy analogicznie jak w zadaniu 8.1:

$$\tau_{zx} = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

W skrajnych warstwach naprężenia styczne są równe zero, natomiast maksymalne wartości wystąpią w warstwie przechodzącej przez środek masy ($z = 0$):

$$\tau_{zx}^{\max} = \tau_{zx}(z = 0) = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} = \frac{3}{4} \frac{P}{bh} = \frac{3}{4} \frac{4000}{14 \cdot 42} = 5,102 \text{ MPa}$$

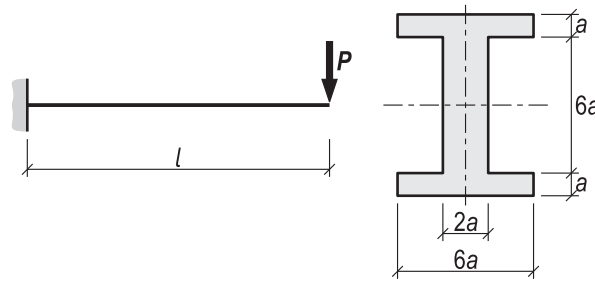
Wykres naprężeń stycznych przedstawiono na rys. 8.14.



Rys. 8.14

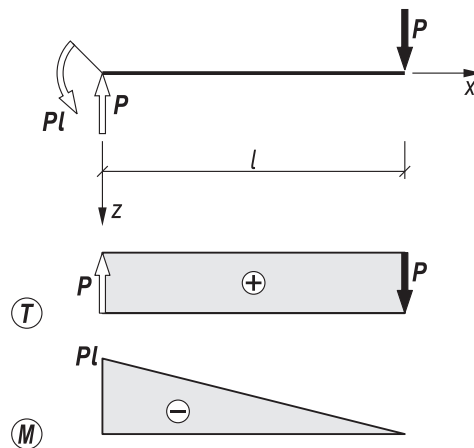
Zadanie 8.3.

Belka wspornikowa o przekroju dwuteowym jest obciążona jak na rys. 8.15. Zaprojektować belkę z warunku nośności. Dane: $P = 6 \text{ kN}$, $l = 400 \text{ mm}$, $k_g = 180 \text{ MPa}$.

**Rys. 8.15***Rozwiązanie*

Sporządzamy wykresy momentów gnących i sił tnących (rys. 8.16). Maksymalny moment gnący występuje w miejscu utwierdzenia, a jego wartość wynosi:

$$M_{\max} = Pl$$

**Rys. 8.16**

Centralny moment bezwładności I_y przekroju dwuteowego (rys. 8.17) jest równy:

$$I_y = 2 \left[\frac{6a \cdot a^3}{12} + 6a^2 \cdot \left(\frac{7}{2}a \right)^2 \right] + \frac{2a \cdot (6a)^3}{12} =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2}a^4 + \frac{147}{2}a^4 \right] + 36a^4 = 184a^4$$

a wskaźnik wytrzymałości na zginanie:

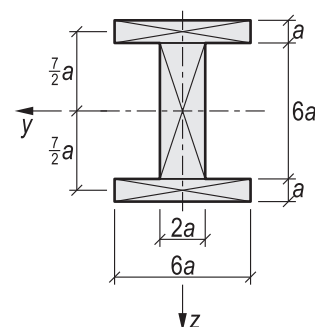
$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{I_y}{4a} = \frac{184a^4}{4a} = 46a^3$$

Warunek nośności ma zatem postać:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{Pl}{46a^3} \leq k_g$$

Wykonując kolejne przekształcenia, wyznaczamy minimalną wielkość parametru a :

$$a^3 \geq \frac{Pl}{46k_g} \quad a \geq \sqrt[3]{\frac{Pl}{46k_g}}$$

**Rys. 8.17**

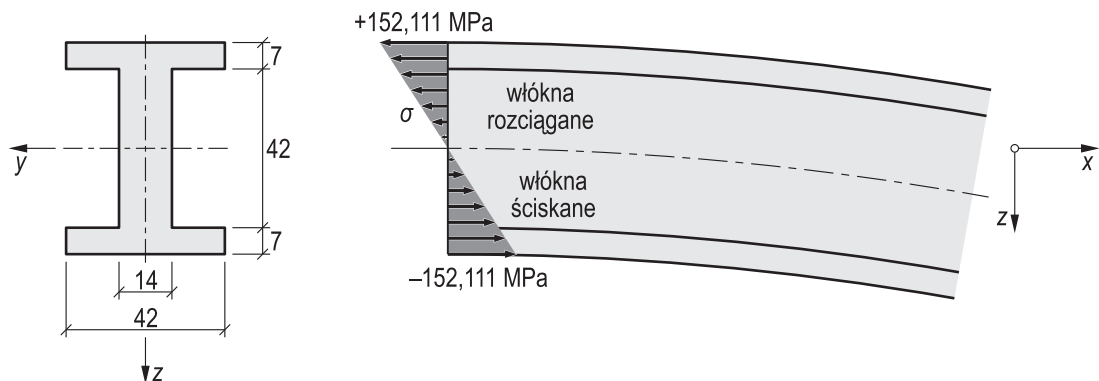
Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{6000 \cdot 400}{46 \cdot 180}} = 6,62 \text{ mm}$$

Przyjmujemy $a = 7 \text{ mm}$. Maksymalne naprężenia normalne wywołane momentem gnącym są równe:

$$\sigma_{\max} = \frac{Pl}{46a^3} = \frac{6000 \cdot 400}{46 \cdot (7)^3} = 152,111 \text{ MPa}$$

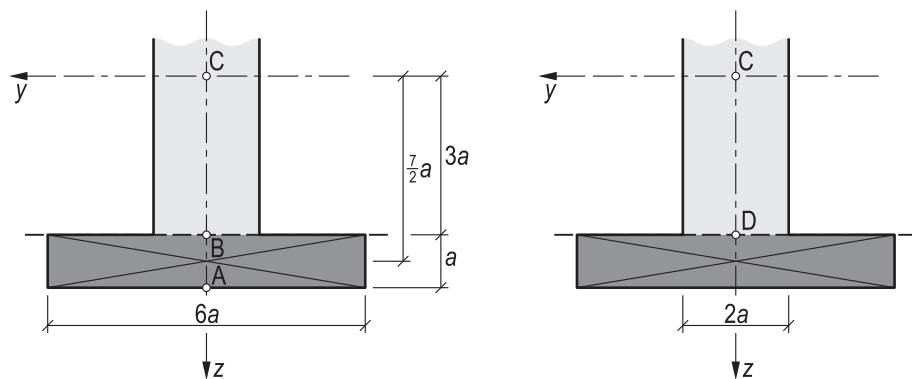
Wykres naprężeń normalnych przedstawiono na rys. 8.18.



Rys. 8.18

Wartość siły tnącej T w rozpatrywanym przekroju jest równa P . Naprężenia styczne wyznaczmy ze wzoru Żurawskiego (8.4). Rozpatrywany przekrój jest symetryczny, w związku z czym rozpatrzmy jedynie górną połowę przekroju.

Wyznaczanie naprężeń stycznych rozpoczniemy od dolnej półki dwuteownika (rys. 8.19), gdzie $4a \leq z \leq 3a$.



Rys. 8.19

Naprężenia styczne w skrajnej warstwie ($z = 4a$) są równe zeru.

$$\tau_{zx}^A = 0$$

Moment statyczny względem centralnej osi bezwładności y , części przekroju poprzecznego odciętej linią przechodzącą przez punkty B i D, jest równy:

$$S_y^B = S_y^D = (6a \cdot a) \cdot \frac{7}{2}a = 21a^3$$

Szerokość przekroju powyżej linii przechodzącej przez punkt B jest równa $b(z) = 6a$.

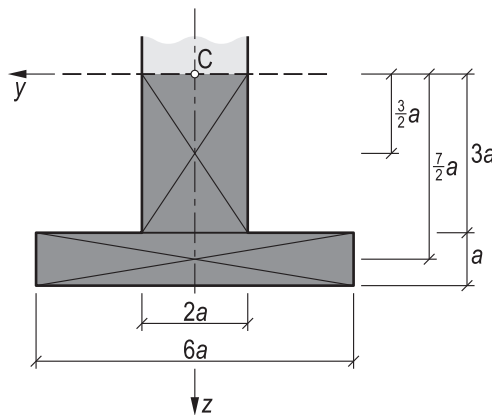
Po podstawieniu do zależności (8.4) otrzymujemy:

$$\tau_{zx}^B = \frac{T S_y^B}{I_y b(z)} = \frac{P \cdot 21a^3}{184a^4 \cdot 6a} = \frac{7}{368} \frac{P}{a^2} = \frac{7}{368} \frac{6000}{(7)^2} = 2,329 \text{ MPa}$$

Szerokość przekroju poniżej linii przechodzącej przez punkt D jest równa $b(z) = 2a$. Naprężenia styczne są więc równe:

$$\tau_{zx}^D = \frac{T S_y^D}{I_y b(z)} = \frac{P \cdot 21a^3}{184a^4 \cdot 2a} = \frac{21}{368} \frac{P}{a^2} = \frac{21}{368} \frac{6000}{(7)^2} = 6,987 \text{ MPa}$$

W kolejnym kroku wyznaczmy naprężenia styczne w środku (rys. 8.20), gdzie $3a \leq z \leq 0$.



Rys. 8.20

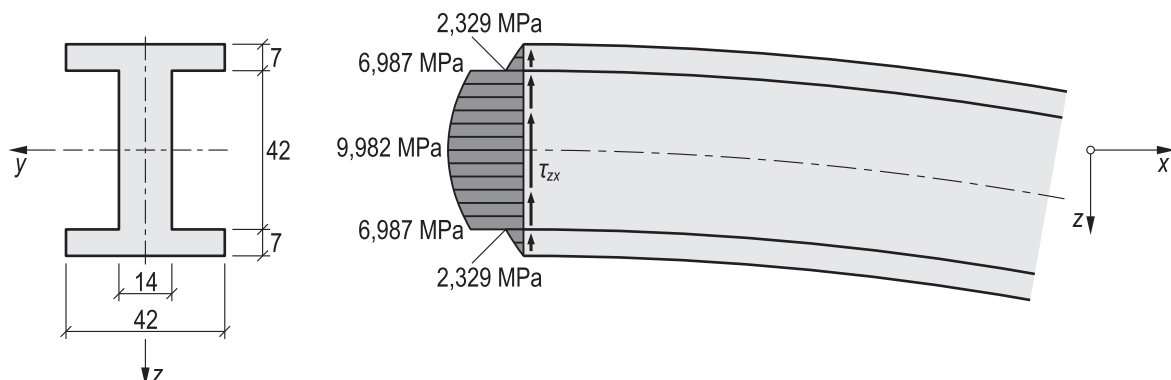
Moment statyczny względem centralnej osi bezwładności y , części przekroju poprzecznego odciętej linią przechodzącą przez środek masy przekroju C, jest równy:

$$S_y^C = (6a \cdot a) \cdot \frac{7}{2}a + (2a \cdot 3a) \cdot \frac{3}{2}a = 21a^3 + 9a^3 = 30a^3$$

Szerokość przekroju środka jest stała i wynosi $b(z) = 2a$. Naprężenia styczne w warstwie przechodzącej przez środek masy przekroju C są więc równe:

$$\tau_{zx}^C = \frac{T S_y^C}{I_y b(z)} = \frac{P \cdot 30a^3}{184a^4 \cdot 2a} = \frac{15}{184} \frac{P}{a^2} = \frac{15}{184} \frac{6000}{(7)^2} = 9,982 \text{ MPa}$$

Wykres naprężeń stycznych przedstawiono na rys. 8.21.



Rys. 8.21